GEOMETRIA DE POSIÇÃO II – Etapa 1
(A00005)

Para o inicio da atividade é necessário enfatizar as característica do cubo e sua relação com a Geometria de Posição. Analisando o cubo, percebe-se que ele contém 8 vértices, 12 arestas (que de duas a duas formam um ângulo de 90°) e 6 faces. Os vértices são exemplos de **pontos** (não tem dimensão), as arestas são exemplos de **segmentos de reta** e se prolongarmos elas nos dois sentidos podemos imaginar **retas** e, por fim, as faces que são exemplos de **superfícies planas** e que ao expandi-las nos remetem **planos**. A letra maiúscula é usada para representar um ponto, a letra minúscula uma reta e a letra grega um plano.

Acima, foram mencionados aspectos relevantes para continuidade da atividade. Veja, há três definições que sempre estarão presentes na discussão.

Espaço: é o conjunto formado por todos os pontos.

Retas concorrentes: são duas retas que possuem um ponto em comum. $(r \cap s = \{P\})$

Retas paralelas: são duas retas que são coincidentes ou são coplanares (estão contidas em um mesmo plano) e não tem ponto em comum.

Como por dois pontos passa uma única reta, clique na opção de retas ( ) e selecione os pontos A e C, depois os pontos B e C. Agora você consegue visualizar duas retas concorrentes. Qual a principal característica dessas retas?

Clique duas vezes no botão voltar ( ).

Em seguida veremos retas paralelas. Clique na opção retas ( ) e selecione os pontos A e B, depois D e C. Se você rotacionar a janela de visualização verá que em nenhum momento essas duas retas se interceptam e por isso são denominadas como retas paralelas distintas.

Clique no botão voltar ( ) até limpar toda área de visualização.

O **postulado da determinação** diz que por dois pontos distintos passam uma **única reta** e com três pontos não colineares é possível determinar um **único plano**. Sendo assim, clique no botão de retas ( ) selecione os pontos E e G (verá a reta t). Depois clique no botão planos ( ) e selecione os pontos A, B e C (verá o plano β). Discutir o **postulado da existência** $(\in / \notin)$ é quando há referência da relação entre o ponto e uma reta, ou do ponto e um plano. Já o **postulado da inclusão** $(\subset / \not\subset)$ é quando há referência entre a reta e um plano. Use os símbolos para representação as relações abaixo.

A __ β G __ t $\overline{DA}$ __ β
E __ β D __ t
t __ β

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Usando o botão de retas ( ) determine uma reta (s) com dois pontos (__,__), agora usando o botão ( ) selecione um ponto que não pertence a s (__). Verifique se __ $\notin s$. Utilize o botão de posição entre duas retas ( ) e clique no botão de retas paralelas ( ) para que em seguida selecione a reta e o ponto escolhido. Você acaba de visualizar o que afirma o **postulado de Euclides** (ou postulado das paralelas): por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

Sobre a **determinação do plano**, já visualizamos o postulado de determinação, mas além dele existem três proposições para determinar um plano. São elas:

[PROP1] por meio de uma reta e um ponto fora dela:

Seja uma reta t determinada pelos pontos (__ e __) com a ferramenta de retas ( ) e um ponto __ $\notin t$, podemos determinar um plano usando o botão de plano ( ), depois ( ) e selecionando-os.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

[PROP2] por meio de duas retas concorrentes:

Use a ferramenta de retas ( ) para determinar r (____) e s (____) concorrentes. Em seguida clique no botão de plano ( ), depois ( ) e selecione as retas.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

[PROP3] por meio de duas retas paralelas e distintas:

Use a ferramenta de retas ( ) para determinar u (____) e v (____) retas paralelas e distintas. Em seguida clique no botão de plano ( ), depois ( ) e selecione as retas.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

GEOMETRIA DE POSIÇÃO II – Etapa 2
(A00005)

Antes de discutir sobre a **posição relativa entre dois planos** é importante falar sobre os planos secantes. Diz que dois **planos** são **secantes** se têm um ponto em comum, e o postulado da interseção diz que se dois planos distintos tem um ponto em comum, então ele têm pelo menos um outro ponto em comum. Por fim, a propriedade a interseção de planos que diz se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a interseção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto. Assim, $\alpha \cap \beta = t$ se os planos são secantes.

Já os **planos paralelos** são aqueles que não têm ponto em comum ou são coincidentes. Veja os planos usando o botão de plano ( ) em seguida ( ) :

- γ determinado pelos pontos A, B e C. β determinado pelos pontos F, E e D.
  γ e β são planos ____________________ (secantes ou paralelos?)
- α determinado pelos pontos B, A e F. β determinado pelos pontos C, G e H.
  α e β são planos ____________________ (secantes ou paralelos?)

Uma rotação da tela de visualização ajuda para melhor analisar a posição relativa entre os dois planos.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Quais são as suas sugestões de dois planos que sejam secantes e de dois planos que sejam paralelos?____

____

____.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

As **posições relativas de uma reta e um plano** dependem exclusivamente do número de pontos que eles têm em comum. E podem ocorrer três situações:

[A] A reta e o plano têm em comum dois pontos distintos: sendo assim, a reta está contida no plano.

Com o botão de plano ( ) selecione os pontos H, G e D. Em seguida, com o botão de retas ( ) os pontos G e D. Agora rotacione e perceba que a reta (r) e o plano (β) têm dois pontos (__ e __) em comum e que a reta está contida ($\subset$) no plano, ou seja $r \cap \beta =$ __.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

[B] A reta e o plano têm em comum um único ponto: sendo assim, a reta e o plano são secantes.

Sugiro que com o botão ( ) em seguida o outro botão ( ) represente um plano (δ) determinado pela reta $\overline{AB}$ e o ponto H. E agora, determine uma reta (s) que tenham um único ponto em comum com o plano, usando o botão de retas ( ). $s =$ ___

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

[C] A reta e o plano não têm nenhum ponto comum: sendo assim, a reta e o plano são paralelos.

Neste caso, temos o plano determinado pelas retas $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$. Usando o botão ( ) em seguida ( ) você verá o plano. Uma reta paralela a este ponto é a reta determinada pelos pontos B e G. Use o botão de retas ( ), rotacione e perceba.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Algumas propriedades da posição relativa entre uma reta e um plano são:

- Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano;
- Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

GEOMETRIA DE POSIÇÃO II – Etapa 3
(A00005)

Partindo da quantidade de pontos em comum é que será analisada a **posição relativa entre duas retas**. Quando duas retas possuem dois pontos em comum, então diz que essas retas são **coincidentes**. No caso, se duas retas têm um único ponto em comum, então elas são **retas concorrentes** e existe um único plano que as contém. As **retas paralelas** são as retas que não têm nenhum ponto em comum, mas que ainda assim existe um plano que as contém. E se duas retas não tem nenhum ponto em comum e não existe plano que as contenha, nesse caso encontra-se **retas reversas**.

- Usando o botão de retas ( ) e determinando as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ nota-se retas coincidentes. Ou seja, temos $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

- Usando o botão ( ) determine duas retas, $\overline{FD}$ e $\overline{FB}$. Qual é a posição relativa entre essas retas? ______________________________.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

- Usando o botão ( ) determine duas retas, $\overline{GC}$ e $\overline{HD}$. Qual é a posição relativa entre essas retas?

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

- Veja que ao usar o botão ( ) e determinar as retas $\overline{FD}$ e $\overline{GC}$ há duas retas reversas (rotacione e perceba as características). Dê um outro exemplo de duas retas que sejam reversas: _________________________________.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Sabe-se que duas retas distintas concorrentes têm 4 ângulo e que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Seja duas retas r e s e $r \cap s = O$, diz que $r\hat{O}s$ é o ângulo das retas. Caso essas retas sejam reversas, diz ângulo formado pelas retas.

Se todos os ângulos entre duas retas são congruentes, então cada ângulo mede 90° e chamados de ângulo reto. Assim, usando o botão de retas ( ) e determinando a reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ verá que as **retas são perpendiculares**. Ou, se determinar a reta $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$ verá **retas oblíquas** (retas que são concorrentes e não são perpendiculares). Agora use o botão ( ) e determine retas reversas (___ e ___) que sejam reversas e que formam um ângulo reto, essas são chamadas de **retas ortogonais**.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Seja uma reta (r) e um plano (α) secante, dizemos que eles são **perpendiculares** se o ângulo formado entre r e outras duas retas que pertencem a α são perpendiculares (ou sejam, mede 90°). Caso a reta e o plano secantes não sejam perpendiculares dizemos que a reta é **oblíqua** ao plano. Observe a janela de visualização e dê exemplo das duas situações.

- Reta perpendicular ao plano: ______ e ______________________________.
- Reta oblíqua ao plano: ______ e ___________________________________.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Agora vejamos os planos perpendiculares. São ditos planos perpendiculares dois planos secantes e um deles contém uma reta perpendicular ao outro. Caso os dois planos sejam secantes, mas não perpendiculares, dizemos que os planos são oblíquos.

Use o botão de planos ( ) e determine dois planos, o primeiro com os pontos A, B e D e o outro com os pontos B, F e G e veja que estes planos são perpendiculares.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.

Também usado o botão de planos determine dois planos, o primeiro com os pontos A, D e F e o outro com os pontos F, G e C e veja que estes planos são oblíquos.

Clique no botão de voltar ( ) e limpe toda a tela.